Lycée Kheniss	Devoir de synthèse n°2	Prof : *************
	Mathématiques Durée : 2h	4 ème Sc 1

EXERCICE N°I: (6pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on désigne par S l'ensemble des points M(x, y, z) tels que : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 4z - 3 = 0$.

1) Montrer que S est une sphère dont on déterminera son centre I et son rayon r.

2) Soit P le plan dont une équation cartésienne est : $x - y + z + 3 = 0$

Déterminer la position relative de S et P. Caractériser $S \cap P$.

3) Soit P_m le plan dont une équation cartésienne est :

P_m : $m x + (1 - m) y + (1 - m) z + m - 3 = 0$

a) Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -\lambda + 1, \quad \lambda \in IR \\ z = \lambda + 2 \end{cases}$$

Vérifier que la droite Δ est incluse dans le plan P_m pour tout réel m.

b) Montrer que Δ est tangente à la sphère S en un point A que l'on précisera.

c) Calculer la distance d (I, P_m) du point I au plan P_m.

d) Déterminer m pour que le plan P_m soit tangent à la sphère S.

Que peut- on dire du point de contact ?

EXERCICE N°2(6pts)

A) Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$

1) Dresser le tableau de variation de f.

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle]0, 2]

Montrer que g réalise une bijection de]0,2] sur I = $]-\infty, 1/4[$.

B)

1) On pose ψ(x) = 3/2 + g(x) pour tout x$\in$ [1, 2]

Montrer que l'équation ψ(x) = x admet dans]1, 2[une solution unique α

2) On définie sur IN la suite (U_n) par : $\begin{cases} U_0 = 3/2 \\ U_{n+1} = \psi(U_n) \end{cases}$

Montrer que pour tout x$\in$ [1, 2], ψ(x)$\in$ [1, 2].

3) a) Montrer que pour tout n$\in$ IN, $1 \leq U_n \leq 2$.

b) Etudier la monotonie de la suite U.

c) Montrer que la suite U est converge et calculer sa limite.

<u>Exercice N°3</u> (8pts)

1) Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = -1 + (1 - x)\,e^{-x}$

a) Calculer $g'(x)$. Etudier son signe.

b) Démontrer que la limite de g en $+\infty$ est égale à -1.

c) Dresser le tableau de variation de g.

d) En déduire que pour tout $x \geq 0$, on a : $g(x) \leq 0$.

2) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = x\,e^{-x} - x + 4$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ (unité:2cm)

a) Vérifier que pour tout x de $[0, +\infty[$ on a : $f'(x) = g(x)$.

b) Etudier les variations de f sur $[0, +\infty[$. Préciser la limite de f en $+\infty$.

3) a) Montrer que la droite Δ d'équation : $y = -x + 4$ est asymptote à (C_f).

Etudier la position de (C_f) par rapport à Δ.

b) Soit D la droite d'équation : $y = -\frac{x}{2} + 4$

Calculer les coordonnées des points d'intersection de (C_f) et D.

c) Préciser la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0.

d) Construire la courbe (C_f).